

Halbgruppen mit ausschließlich reesschen
Linkskongruenzen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

vorgelegt von
Eckehart Hotzel
aus Tilsit

Frankfurt am Main 1968

Mit Genehmigung der Fakultät zum Druck gekürzt. Ein
Exemplar der ungekürzten Arbeit liegt in der
Senckenbergischen Bibliothek der Universität vor.

Dekan: Prof. Dr.rer.nat. Werner Martienssen

Erster Berichterstatter: Prof. Dr.rer.nat. Ernst-August Beh

Zweiter Berichterstatter: Prof. Dr.phil.nat. Ruth Moufang

Tag der mündlichen Prüfung: 8. und 9. Mai 1968



Einleitung

Jedes Ideal in einem Ring ist O-Klasse von genau einer Kongruenzrelation. Ein Ideal in einer Halbgruppe kann jedoch zu verschiedenen Kongruenzrelationen gehören. Die kleinste unter diesen liefert eine Klasseneinteilung, in der außer dem Ideal nur einelementige Teilmengen auftreten. Derartige Kongruenzrelationen wurden zuerst von Rees betrachtet und werden darum hier reesssch genannt, ebenso die entsprechenden Links- und Rechtskongruenzen. Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist die Bestimmung der Halbgruppen mit Null, in denen jede Linkskongruenz reesssch ist (Abschnitt 3). Diese Halbgruppen setzen sich in einfacher Weise aus natürlich angeordneten Halbgruppen zusammen, in denen, abgesehen von der Eins, jedes Element nilpotent ist. Sie sind beinahe kommutativ ((3.15), vgl. (3.16)).

Auf die Halbgruppen mit ausschließlich reesschen Linkskongruenzen wird man auch bei Untersuchungen über Orthogonale und Annihilatoren geführt. Für jedes Linksideal K in einem Ring stimmt das Rechtsideal $K^r = \{x \mid Kx = 0\}$, der Annihilator von K , mit der O-Klasse der Rechtskongruenz $K^\perp = \{(x, y) \mid Kx = Ky \text{ für } K \in K\}$, und außerdem, wenn λ die Linkskongruenz mit der O-Klasse K ist, mit dem Rechtsideal $\lambda^\perp = \{x \mid hx = Kx \text{ für } (h, K) \in \lambda\}$ überein. In einer Halbgruppe mit Null muß man, wenn λ eine Linkskongruenz mit der O-Klasse K ist, die Rechtskongruenz $K^\perp$ und die Rechtsideale K^r und $\lambda^\perp$ unterscheiden, da sie sich nicht mehr gegenseitig vollständig bestimmen. $K^\perp$ heiße das Orthogonal und K^r der Annihilator von K , $\lambda^\perp$ heiße das Orthogonal von λ . In analoger Weise werden jedem Rechtsideal Q die Linkskongruenz ${}^\perp Q$ und das Linksideal ${}^1 Q$ und jeder Rechtskongruenz ϱ das Linksideal ${}^\perp \varrho$ zugeordnet. Die Abbildungen $\lambda \mapsto \lambda^\perp$ und $Q \mapsto {}^\perp Q$ bilden eine Galois-Korrespondenz zwischen Linkskongruenzen und Rechtsidealen (Abschnitt 1).



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545303_0047

Gilt ${}^{\perp}(\lambda^{\perp}) = \lambda$ für alle Linkskongruenzen λ einer Halbgruppe, so auch ${}^{\perp}(K^{\perp}) = K$ für alle Linksideale K , und hieraus folgt ${}^{\perp}(K^{\perp}) = K$ für alle Linksideale K ((2.5)). Diese drei Bedingungen, hier Annihilatorbedingungen genannt, werden in Abschnitt 2 untersucht. Sie sind äquivalent in jeder Halbgruppe, die nur reessche Linkskongruenzen besitzt ((2.5)). Die dualen Halbgruppen von Schwarz ([13]) erfüllen gerade die Bedingungen ${}^{\perp}(K^{\perp}) = K$ für alle Linksideale K und $({}^{\perp}Q)^{\perp} = Q$ für alle Rechtsideale Q . Ersetzt man hier die erste Bedingung durch die schärfere Forderung, daß ${}^{\perp}(\lambda^{\perp}) = \lambda$ für alle Linkskongruenzen λ gilt, so erhält man eine Halbgruppe mit ausschließlich reesschen Linkskongruenzen ((2.6), (3.19)). Es besteht ein gewisser Zusammenhang mit den von Behrens ([1], [2]) untersuchten quasieinreihigen Halbgruppen ((3.20)).

Schließlich wird in Abschnitt 4 gezeigt, daß die Halbgruppen mit ausschließlich reesschen Linkskongruenzen dadurch ausgezeichnet sind, daß in jeder zugehörigen Halbgruppenalgebra jedes Algebra-linksideal von einem Halbgruppenlinksideal aufgespannt wird ((4.1)).

1. Linkskongruenzen, Orthogonale und Annihilatoren

Alle Halbgruppen, die in dieser Arbeit betrachtet werden, sind Halbgruppen mit Null.

Eine Relation $\mathcal{T}$ in einer Halbgruppe S heißt bekanntlich linksverträglich, wenn für jedes $s \in S$ mit (x, y) auch (sx, sy) zu $\mathcal{T}$ gehört. Eine Linkskongruenz in S ist eine linksverträgliche Äquivalenzrelation. Die identische Relation α ist das kleinste, die Allrelation ω das größte Element im Verband der Linkskongruenzen von S . Unter den Äquivalenzklassen einer Linkskongruenz ist als einzige die Klasse, in der das Nullelement 0 liegt, ein Linksideal.

Enthalten alle übrigen Klassen höchstens ein Element, so heiße die Linkskongruenz reessch. Für Rechtskongruenzen gilt das Entsprechende.

Für jede Relation λ in S heiße die Menge $\lambda^\perp = \{s \mid xs = ys \text{ für } (x,y) \in \lambda\}$ das Orthogonal von λ (vgl. Bourbaki [4], S. 44). Dieses ist ein Rechtsideal. Entsprechend bedeute ${}^\perp g$ für $g \subseteq S \times S$ das Linksideal $\{s \mid sx = sy \text{ für } (x,y) \in g\}$. Für jede Untermenge K von S heiße die Relation $K^\perp = \{(s,t) \mid xs = xt \text{ für } x \in K\}$ das Orthogonal von K .

Dieses ist eine Rechtskongruenz. Entsprechend bezeichne ${}^\perp Q$ für $Q \subseteq S$ die Linkskongruenz $\{(s,t) \mid sx = tx \text{ für } x \in Q\}$. Unter dem Annihilator $K^\perp$ einer Untermenge K von S versteht man das Rechtsideal

$\{s \mid xs = 0 \text{ für } x \in K\}$, unter ${}^\perp Q$ ($Q \subseteq S$) das Linksideal $\{s \mid sx = 0 \text{ für } x \in Q\}$.

Im folgenden werden ausschließlich Linkskongruenzen λ und Rechtsideale Q betrachtet. Das Paar der Abbildungen $\lambda \longrightarrow \lambda^\perp$ und $Q \longrightarrow {}^\perp Q$ ist eine Galoiskorrespondenz zwischen dem Verband der Linkskongruenzen von S und dem Verband der Rechtsideale von S , d.h. es gilt:

$$(1.1) \quad \lambda_1 \subseteq \lambda_2 \implies \lambda_2^\perp \subseteq \lambda_1^\perp, \quad Q_1 \subseteq Q_2 \implies {}^\perp Q_2 \subseteq {}^\perp Q_1$$

für alle Linkskongruenzen λ_1, λ_2 und alle Rechtsideale Q_1, Q_2

$$(1.2) \quad \lambda \subseteq {}^\perp(\lambda^\perp), \quad Q \subseteq ({}^\perp Q)^\perp$$

für alle Linkskongruenzen λ und alle Rechtsideale Q .

Daraus folgt (vgl. Cohn [7], S. 44; Birkhoff [3], S. 124):

$$(1.3) \quad \lambda^\perp = ({}^\perp(\lambda^\perp))^\perp, \quad {}^\perp Q = {}^\perp(({}^\perp Q)^\perp)$$

für alle Linkskongruenzen λ und alle Rechtsideale Q .

Weiterhin gilt ($\bigcup_{\lambda \in \mathcal{L}} \lambda$ bezeichnet die Verbindung im Linkskongruenzverband)

$$(1.4) \quad \left(\bigcup_{\lambda \in \mathcal{L}} \lambda \right)^\perp = \bigcap_{\lambda \in \mathcal{L}} \lambda^\perp \quad \text{für jede Familie } \mathcal{L} \text{ von Linkskongruenzen}$$

und ${}^\perp \left(\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q \right) = \bigcap_{Q \in \mathcal{Q}} {}^\perp Q$ für jede Familie $\mathcal{Q}$ von Rechtsidealen.

Ist λ eine Kongruenzrelation, so ist $\lambda^\perp$ ein Ideal, und ist Q ein Ideal, so ist ${}^\perp Q$ eine Kongruenzrelation (vgl. Hoehnke [11], S. 301).

Daher ist mit den Abbildungen $\lambda \rightarrow \lambda^\perp$ und $Q \rightarrow {}^\perp Q$ auch eine Galoiskorrespondenz zwischen dem Verband der Kongruenzrelationen und dem Verband der Ideale von S gegeben.

2. Annihilatorbedingungen

Die aus der Ringtheorie bekannten Annihilatorbedingungen lassen sich mittels der Definitionen von Abschnitt 1 in verschiedener Weise auf die Halbgruppentheorie übertragen.

$$(1_L) \quad {}^\perp(\lambda^\perp) = \lambda \text{ für alle Linkskongruenzen (Kongruenzen) } \lambda \text{ von } S$$

$$(1_R) \quad ({}^\perp \varrho)^\perp = \varrho \text{ für alle Rechtskongruenzen (Kongruenzen) } \varrho \text{ von } S$$

$$(2_L) \quad {}^1(K^r) = K \text{ für alle Linksideale (Ideale) } K \text{ von } S$$

$$(2_R) \quad ({}^1 Q)^r = Q \text{ für alle Rechtsideale (Ideale) } Q \text{ von } S$$

$$(3_L) \quad {}^\perp(K^\perp) = K \text{ für alle Linksideale (Ideale) } K \text{ von } S$$

$$(3_R) \quad ({}^\perp Q)^\perp = Q \text{ für alle Rechtsideale (Ideale) } Q \text{ von } S$$

Für jede reessche Linkskongruenz λ mit der 0-Klasse K ist $\lambda^\perp = K^r$ ((2.1), (2.2)), und die 0-Klasse von $K^\perp$ ist gleich K^r ((2.3), (2.4)).

Mit Hilfe dieser Bemerkungen beweist man den folgenden

Hilfssatz (2.5): Aus (1_L) folgt (2_L) , aus (2_L) folgt (3_L) . Sind alle Linkskongruenzen (Kongruenzen) von S reessch, so ist (1_L) mit (2_L) äquivalent. Sind alle Rechtskongruenzen (Kongruenzen) von S reessch, so ist (2_L) mit (3_L) äquivalent.

Die Tatsache, daß (1_L) äquivalent ist mit der Eineindeutigkeit der Abbildung $\lambda \rightarrow \lambda^\perp$ des Linkskongruenz(Kongruenz)verbandes in den Rechtsideal(Ideal)verband, und die entsprechende Tatsache für (2_R) beweisen den wichtigen

Hilfssatz (2.6): Gelten die Annihilatorbedingungen (1_L) und (2_R) , so gibt es in S nur reessche Linkskongruenzen (Kongruenzen).

Wegen der Distributivität des Idealverbandes läßt sich beweisen:

(2.7) Erfüllt S die Maximalbedingung oder die Minimalbedingung für Ideale und die Annihilatorbedingung (1_L) oder (1_R) (für Kongruenzen bzw. Ideale), so besitzt S nur reessche Kongruenzen.

Eine Halbgruppe S ist O-disjunkte Vereinigung ihrer Unterhalbgruppen S_ι , $\iota \in I$, und in ihre Unterhalbgruppen S_ι , ihre Komponenten, O-disjunkt zerlegbar, wenn $S = \bigcup_{\iota \in I} S_\iota$ und $S_\iota \cap S_\mu = 0$ für $\iota \neq \mu$ gilt.

(2.8) Hilfssatz: S sei O-disjunkte Vereinigung von Idealen S_ι , $\iota \in I$.

1) Gilt (1_L) in S , so auch in S_ι für alle $\iota \in I$.

2) Genau dann gilt (2_L) in S , wenn (2_L) in S_ι gilt für alle $\iota \in I$.

3) Genau dann gilt (3_L) in S , wenn (3_L) in S_ι gilt für alle $\iota \in I$.

Für jede Linkskongruenz λ in einer in Ideale S_ι O-disjunkt zerlegten Halbgruppe S ist $\lambda_\iota = (\lambda \cap S_\iota \times S_\iota) \sqcup \alpha$, die ι -Komponente von λ , die größte Linkskongruenz von S , die feiner als λ ist und aus einer Linkskongruenz von S_ι durch Vereinigung mit α hervorgeht.

(2.9) λ ist genau dann Verbindung ihrer Komponenten λ_ι , wenn nur die O-Klasse von λ Elemente aus verschiedenen S_ι enthält.

(2.10) Genau dann ist jede Linkskongruenz von S Verbindung ihrer Komponenten, wenn ein Index o in I existiert mit $a \in Sa$ für alle $a \notin S_o$.

(2.11) Die Halbgruppe S sei O-disjunkte Vereinigung von Idealen S_ι , $\iota \in I$, und sei $o \in I$. Für jedes a mit $a \notin S_o$ sei $a \in Sa$.

Dann gilt (1_L) in S , wenn (1_L) in allen S_ι , $\iota \in I$, gilt.

Im Zusammenhang mit den folgenden Behauptungen sei an (2.5) erinnert und darauf hingewiesen, daß $S^\perp = \alpha$ aus (1_R) , $S^r = 0$ aus (3_R) folgt.

(2.12) Ist $S^\perp = \alpha$ und gilt (3_L) für Linksideale, so liegt jedes a in Sa .

(2.13) Ist $S^r = 0$ und gilt (2_L) für Linksideale, so liegt jedes a in Sa .

3. Halbgruppen mit ausschließlich reesschen Linkskongruenzen

Sei S eine Halbgruppe, die nur reessche Linkskongruenzen besitzt.

Aus $xa = ya \neq 0$ folgt dann $x = y$, S ist also schwach rechtskürzbar.

In den Beweisen zu verschiedenen Behauptungen dieses Abschnitts ((3.1), (3.2), (3.4), (3.6), (3.13)) geht es um die von einer Relation σ erzeugte Linkskongruenz (vgl. Clifford & Preston [5], S.18) und insbesondere um die Elemente, die in derselben Klasse der von σ erzeugten Linkskongruenz liegen wie zwei vorgegebene Elemente s und t mit $(s,t) \in \sigma$. Falls σ linksverträglich ist, handelt es sich um die Elemente, die sich mit s oder t in endlich vielen Schritten " σ -verketteten" lassen. Für $s \neq t$ ist unter diesen Elementen auch die Null. Beispielsweise ist für jedes Linksideal K von S und für jedes Element a mit $a \notin K$ die Relation $\{(s, sa) \mid s \in K\}$ linksverträglich. Hieraus erschließt man mit Hilfe der schwachen Rechtskürzbarkeit den

Hilfssatz (3.1): In einer Halbgruppe, die nur reessche Linkskongruenzen besitzt, ist jedes Linksideal ein Ideal.

Für alle x und a aus S gilt

$$(3.2) \quad xa = x \quad \text{oder} \quad xa^n = 0 \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N},$$

und hieraus folgt:

$$(3.3) \quad a = a^2 \quad \text{oder} \quad a^m = 0 \quad \text{für fast alle } m \in \mathbb{N},$$

$$a = a^2 \implies xa = x \quad \text{oder} \quad xa = 0,$$

$$xa = x \implies a = a^2 \quad \text{oder} \quad x = 0,$$

$$xa = a \implies x = x^2 \quad \text{oder} \quad a = 0.$$

(3.4) Das Produkt zweier verschiedener Idempotenten von S ist 0 und

(3.5) mit $T_- = \{x \mid x \notin Sx\} \sqcup \{0\}$, $T_e = \{x \mid x = ex\}$ ist $S = T_- \cup \bigcup_{e=e \neq 0} T_e$ eine 0-disjunkte Zerlegung von S in Rechtsideale.

Bedeutet T eines der Rechtsideale T_e oder das Rechtsideal T_0 , so gilt (3.6) $a, b \in T \implies a \in S^1 b$ oder $b \in S^1 a$, und wegen (3.5) auch (3.7) $a, b \in T \implies a \in T^1 b$ oder $b \in T^1 a$. T erfüllt daher die Voraussetzungen in folgendem

Hilfssatz (3.8): Gilt in einer Halbgruppe H für je zwei Elemente a und b die Beziehung $a \in H^1 b$ oder $b \in H^1 a$ und ist jedes Element, welches nicht Linkseins ist, nilpotent, so besitzt H nur reessche Linkskongruenzen.

Eine angeordnete Halbgruppe $\overset{H}{\text{ (vgl. Fuchs [9], S. 215) }}$ heißt linksnatürlich angeordnet, wenn $a \leq b$ mit $H^1 a \subseteq H^1 b$ äquivalent ist. Eine linksnatürlich und rechtsnatürlich angeordnete Halbgruppe heißt natürlich angeordnet (vgl. [9], S. 217).

(3.9) T ist eine linksnatürlich angeordnete Halbgruppe.

T ist sogar kommutativ und daher natürlich angeordnet, denn es gilt

Satz (3.10): Jede linksnatürlich angeordnete Halbgruppe, deren Elemente mit Ausnahme des möglicherweise vorhandenen Einselementes nilpotent sind, ist kommutativ.

Der Beweis dieses Satzes stammt im wesentlichen von Fuchs (vgl. [9], S. 227, Satz 1). Die betrachteten Halbgruppen lassen sich nach Clifford (vgl. Fuchs [9], S. 228) sehr genau durch die multiplikative Halbgruppe der reellen Zahlen im Intervall $[0,1]$ beschreiben ((3.11)).

Es läßt sich nun zeigen, daß (3.13) für alle Idempotente e die Gleichung $eT_- = 0$ gilt, daß (3.12) kein oder genau ein Idempotent f mit $T_- f \neq 0$ existiert und daß (3.14) im zweiten Fall T_- die aus zwei Elementen bestehende Nullhalbgruppe ist, für deren von Null verschiedenes Element u mit $x \neq f$, $x \in S$, auch $ux = 0$ gilt.

Satz (3.15): Eine Halbgruppe S besitzt genau dann nur reessche Linkskongruenzen, wenn sie 0-disjunkte Vereinigung von höchstens einem Ideal T_0 und beliebig vielen Idealen T_e ist, welche die folgenden Eigenschaften haben:

Jedes T_e ist eine natürlich angeordnete Halbgruppe mit Einselement e , und jedes Element außer e ist nilpotent.

T_0 ist entweder eine natürlich angeordnete Halbgruppe, in der jedes Element nilpotent ist, oder es ist $T_0 = \{u, 0\} \cup T_f$, wobei T_f eine natürlich angeordnete Halbgruppe mit Einselement f ist, in der jedes Element außer f nilpotent ist, und $u \neq 0$, $T_0 u = 0$, $uf = u$ und $ux = 0$ für $x \neq f$, $x \in T_0$, gilt.

(Beweis durch (3.3), (3.4), (3.5), (3.9), (3.10), (3.12), (3.13) und (3.14) bzw. mit Hilfssatz (3.8))

(3.16) Jede Halbgruppe, die nur reessche Links- und Rechtskongruenzen besitzt, ist kommutativ.

Eine Halbgruppe mit ausschließlich reesschen Linkskongruenzen ist auch dann kommutativ, wenn eine der Annihilatorbedingungen erfüllt ist. Daher sind (3.17) in einer Halbgruppe, die nur reessche Linkskongruenzen besitzt, alle Annihilatorbedingungen äquivalent.

Satz (3.18): Eine Halbgruppe S , die nur reessche Linkskongruenzen besitzt, erfüllt genau dann eine der Annihilatorbedingungen, wenn sie Vereinigung von Idealen ist, die alle (als Halbgruppen) ein Einselement und ein minimales Ideal besitzen.

Satz (3.19): In jeder Halbgruppe S sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1) ${}^\perp(\lambda^\perp) = \lambda$ für jede Linkskongruenz λ und
 $({}^\perp \varrho)^\perp = \varrho$ für jede Rechtskongruenz ϱ von S

- 2) S besitzt nur reessche Linkskongruenzen, $x \in Sx$ für alle $x \in S$, und jedes von 0 verschiedene Ideal von S umfaßt ein minimales Ideal.
- 3) S ist 0-disjunkte Vereinigung von natürlich angeordneten Idealen, die ein Einselement und ein minimales Element besitzen und deren vom Einselement verschiedene Elemente nilpotent sind.

Eine Halbgruppe S ist quasieinreihig (Behrens [1], [2]), wenn alle ihre Idempotente primitiv sind, wenn die Halbordnung der Hauptideale eine mit der Multiplikation verträgliche Halbordnung der Elemente liefert, wenn jedes von Null verschiedene Produkt zweier Idempotente e_i, e_k in dieser Halbordnung genau einen unteren Nachbarn in $e_i S e_k$ besitzt und wenn weiter $a \in SaS$ für alle $a \in S$ gilt und kein von Null verschiedenes Element in unendlich vielen Hauptidealen liegt. Die beiden erstgenannten Eigenschaften haben die quasieinreihigen Halbgruppen mit den Halbgruppen mit ausschließlich reesschen Linkskongruenzen gemeinsam. Im übrigen gilt:

(3.20) Die Halbgruppen mit Maximalbedingung für Hauptideale, in denen jede Linkskongruenz λ die Bedingung ${}^\perp(\lambda^\perp) = \lambda$ und jede Rechtskongruenz ϱ die Bedingung $({}^\perp \varrho)^\perp = \varrho$ erfüllt, sind genau die kommutativen quasieinreihigen Halbgruppen mit Minimalbedingung für Hauptideale (vgl. [2], § 1, Satz 6).

4. Halbgruppenalgebren, in denen jedes Linksideal von einem Halbgruppenlinksideal bestimmt wird

In der Halbgruppenalgebra $\phi[S]$ einer Halbgruppe S über einem kommutativen Körper ϕ ist der von einem Linksideal K von S aufgespannte Unterraum $\phi[K]$ ein Algebralinksideal. Im allgemeinen erhält man aber nicht jedes Algebralinksideal auf diese Weise. Es gilt vielmehr

Satz (4.1): Eine Halbgruppe S besitzt genau dann nur reessche Linkskongruenzen, wenn jedes Algebralinksideal in der Halbgruppenalgebra $\phi[S]$ die Form $\phi[K]$ hat.

Beim Beweis dieses Satzes in der einen Richtung kann man sich auf den Fall $S = T_e$ oder $S = T_0$ ((3.15)) beschränken. S ist dann eine natürlich angeordnete Halbgruppe, und jedes Element von $\phi[S]$ kann in der Form $\sum_{i=1}^n \xi_i s_i$ mit $s_i \in S \setminus 0$, $\xi_i \neq 0$ und $s_1 > s_2 > \dots > s_n$ geschrieben werden. Mit Hilfe der Eigenschaften einer natürlichen Anordnung und der Nilpotenz der von Eins verschiedenen Elemente von S läßt sich dann zeigen, daß jedes Algebralinksideal mit $\sum_{i=1}^n \xi_i s_i$ auch $s_1, s_2, \dots, s_n$ enthält. Beim Beweis in der umgekehrten Richtung ist wesentlich, daß für jede Linkskongruenz λ von S die endlichen Linearkombinationen $\sum \xi_i (a_i - b_i)$ mit $(a_i, b_i) \in \lambda$ ein Algebralinksideal bilden.

Wenn jedes Algebralinksideal in $\phi[S]$ die Form $\phi[K]$ hat, stimmen nach (4.1) und nach Hilfssatz (3.1) die Algebralinksideale von $\phi[S]$ mit den Algebraidealen von $\phi[S]$ überein (4.2). Schließlich gilt noch der folgende Satz, dessen Umkehrung falsch ist.

Satz (4.3): Ist S eine Halbgruppe, in der jede Linkskongruenz λ die Bedingung ${}^{\perp}(\lambda^{\perp}) = \lambda$ und jede Rechtskongruenz ϱ die Bedingung $({}^{\perp}\varrho)^{\perp} = \varrho$ erfüllt, so ist $\phi[S]$ kommutativ, und für jedes Ideal K von $\phi[S]$ gilt ${}^{\perp}(K^{\perp}) = K$.

- [1] E.-A. Behrens: Die Halbgruppe der Ideale in Algebren mit distributivem Idealverband,
Arch. Math. 13 (1962), 251 - 266
- [2] E.-A. Behrens: Unendliche quasi-einreihige Halbgruppen,
Math. Annalen 155 (1964), 343 - 368
- [3] G. Birkhoff: Lattice Theory, 3. Auflage,
Providence 1967
- [4] N. Bourbaki: Éléments de mathématique, Livre II:
Algèbre, Chap. II: Algèbre linéaire,
Paris 1947
- [5] A. H. Clifford, G. B. Preston: The Algebraic Theory of Semigroups I,
Providence 1961
- [6] A. H. Clifford, G. B. Preston: The Algebraic Theory of Semigroups II,
Providence 1967
- [7] P. M. Cohn: Universal Algebra,
New York, Evanston, London, Tokyo 1965
- [8] Ch. W. Curtis, I. Reiner: Representation Theory of Finite Groups
and Associative Algebras,
New York 1962
- [9] L. Fuchs: Teilweise geordnete algebraische
Strukturen,
Göttingen 1966
- [10] H.-J. Hoehnke: Zur Strukturtheorie der Halbgruppen,
Math. Nachr. 26 (1963), 1 - 13
- [11] H.-J. Hoehnke: Über das untere und obere Radikal
einer Halbgruppe,
Math. Zeitschrift 89 (1965), 300 - 311
- [12] H.-J. Hoehnke: Structure of Semigroups,
Can. J. Math. 18 (1966), 449 - 491
- [13] S. Schwarz: On Dual Semigroups,
Czechoslovak Math. J. 10 (85) (1960),
201 - 230
- [14] E. J. Tully jr.: Representation of a semigroup by
transformations acting transitively
on a set,
Am. J. Math. 83 (1961), 533 - 541

Lebenslauf

Ich bin am 2. Mai 1937 in Tilsit an der Memel geboren. Mein Vater ist der Glasermeister Rudolf Hotzel, meine Mutter die Hausfrau Gerda Hotzel geb. Looß. Ich bin mit Elisabeth Hotzel geb. Glaßer verheiratet.

Nach dem Besuch der Volksschule in Maraunen bei Zinten in Ostpreußen, in Eisenach, in Greetsiel in Ostfriesland und wieder in Eisenach war ich von 1951 bis 1952 Schüler der Luther-Oberschule in Eisenach und von 1952 bis zur Reifeprüfung im März 1957 Schüler des realgymnasialen Zweiges der Alten Klosterschule in Bad Hersfeld. Seit Mai 1957 bin ich an der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität in Frankfurt am Main immatrikuliert.

Die Hauptfächer meines Studiums waren Mathematik und Physik. Neben dem Besuch von mathematischen und physikalischen Vorlesungen, Übungen, Seminaren und Praktika nahm ich auch an Lehrveranstaltungen in anderen Gebieten teil, so vor allem in Geschichte der Naturwissenschaften, Philosophie und Musikwissenschaft. Ende 1964 bestand ich das Staatsexamen für das Lehramt an Höheren Schulen.

Von September 1964 bis September 1967 war ich wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Seminar bei Herrn Professor Dr. Behrens. Ihm verdanke ich vielfältige Anregungen und eine wesentliche Förderung meines mathematischen Verständnisses. Im Oktober 1967 wurde ich mit der Verwaltung einer wissenschaftlichen Assistentenstelle bei Frau Professor Dr. Moufang beauftragt.

Meine akademischen Lehrer waren: Adorno, Baer, Beck, Behrens, Burger, Cahn, Cramer, Czerny, Dänzer, Dembowski, Ernst, Ferand, B. Fischer, Franz, v. Friedeburg, Gennrich, Günther, Haag, Habermas, Hartmann, Hartner, Heilmann, Heuser, Hoffmann-Erbrecht, Horkheimer, Köthe, Martienssen, Monsheimer, Moufang, Mrowka, K. Müller, Osthoff, Rausch, Ringel, Salzmann, Sauer, Schaaf, Schmid, Schramm, Stauder, Sturmfels, Stöcklein, Weinstock.

